



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://telegram.me/riazisara>

(@riazisara)

دنباله حسابی (عددی)



به دسته ای از اعداد، مثل اعداد بالا که از یک عدد شروع می شود و با افزایش یک مقدار ثابت به هر جمله، جمله بعدی تشکیل می شه، دنباله حسابی می گیم. (مقدار ثابت می تونه مثبت یا منفی یا صفر باشه) به این مقدار ثابت قدر نسبت می گن و با d نشون می دن.

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$$

$\xrightarrow{+d}$ $\xrightarrow{+d}$ $\xrightarrow{+d}$ $\xrightarrow{+d}$

اگه a_1 رو با $1 \times d$ جمع کنیم a_2 بدست می آید.
 اگه a_1 رو با $2 \times d$ جمع کنیم a_3 بدست می آید.
 اگه a_1 رو با $3 \times d$ جمع کنیم a_4 بدست می آید.
 ⋮
 اگه a_1 رو با $(n-1) \times d$ جمع کنیم a_n بدست می آید.

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

مثال: $a_{15} = a_1 + 14d$, $a_{100} = a_1 + 99d$, $a_{150} = a_1 + 149d$

سؤال: در یک دنباله حسابی جمله پنجم برابر ۱۳ و جمله چهاردهم برابر ۴۰ می باشد. صد و یکم این دنباله را بدست

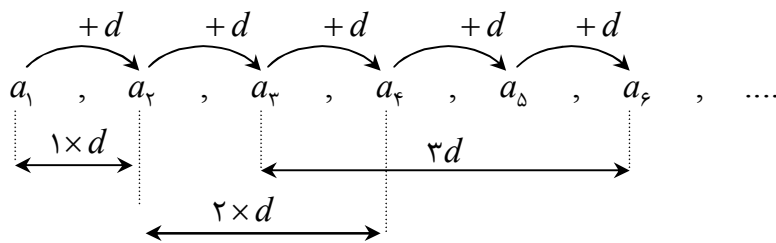
آورید.

$$\begin{cases} a_{13} = 40 \\ a_5 = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 12d = 40 \\ a_1 + 4d = 13 \end{cases}$$

$$- \quad 9d = 27 \Rightarrow d = 3 \rightarrow a_1 + 4d = 13 \rightarrow a_1 + 4 \times 3 = 13$$

$$\Rightarrow a_1 = 1 \Rightarrow a_{101} = a_1 + 100d = 1 + 100(3) = 301$$

یافتن قدر نسبت یک دنباله حسابی با معلوم بودن دو جمله دلخواه:



$$\begin{cases} a_2 - a_1 = 1d = (2-1)d \\ a_4 - a_1 = 3d = (4-1)d \\ a_6 - a_3 = 3d = (6-3)d \end{cases} \Rightarrow a_m - a_n = (m-n)d$$

$$a_{14} - a_5 = (14-5)d = 9d \rightarrow a_{14} = a_5 + 9d$$

$$a_{30} - a_{25} = (30-25)d = 5d \rightarrow a_{30} = a_{25} + 5d$$

$$a_{35} - a_{40} = (35-40)d = -5d \rightarrow a_{35} = a_{40} - 5d$$

$$\Rightarrow a_m = a_n + (m-n)d$$

سؤال ۲: در یک دنباله حسابی $a_7 = 25$ و $a_3 = 9$ می باشد. قدر نسبت این دنباله چیست؟

$$a_7 = a_3 + 4d \Rightarrow 25 = 9 + 4d \Rightarrow 16 = 4d \Rightarrow d = 4$$

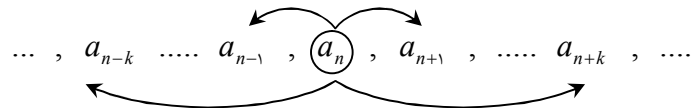
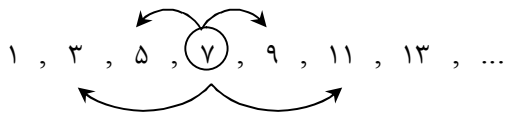
سؤال ۳: در یک دنباله حسابی جمله پنجم برابر ۱۳ و جمله چهاردهم برابر ۴۰ می باشد. جمله صد و یکم این دنباله

را به دست آورید.

$$a_{14} = a_5 + 9d \Rightarrow 40 = 13 + 9d \Rightarrow 27 = 9d \Rightarrow d = 3$$

$$a_{101} = a_5 + 96d = 13 + 96(3) = 13 + 288 = 301$$

واسطه حسابی (عددی):



$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$$

$$2a_n = a_{n-2} + a_{n+2}$$

⋮

$$2a_n = a_{n-k} + a_{n+k}$$

$$\boxed{2a_n = a_{n-k} + a_{n+k}}$$

سؤال ۴: اگر $2p-2, 3p-2$ و $p+1$ سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی باشند قدر نسبت این دنباله را بدست

آورید.

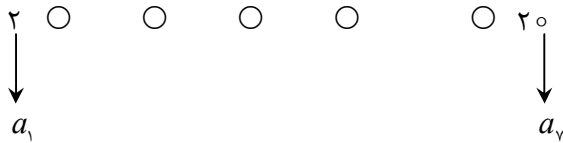
$$2p+1+3p-2=2(p-2) \Rightarrow 5p-1=2p-4 \Rightarrow 3p=-3 \Rightarrow p=-1$$

$$\text{جملات دنباله: } -1, -3, -5 \rightarrow d = -3 - (-1) = -2$$

قرار دادن تعدادی واسطه حسابی بین دو عدد:

آیا می‌تونین بین ۲ و ۲۰ به تعداد ۵ واسطه حسابی قرار بدین. منظور اینه که دنباله

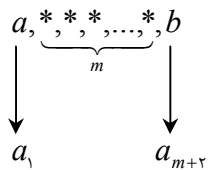
۲ ○ ○ ○ ○ ○ ۲۰



$$\begin{cases} a_6 = 20 \\ a_1 = 2 \end{cases} \rightarrow a_6 = a_1 + 5d \rightarrow 20 = 2 + 5d \rightarrow 18 = 5d \rightarrow d = 3.6$$

۲, ۵, ۸, ۱۱, ۱۴, ۱۷, ۲۰

در حالت کلی اگر دو عدد a و b به تعداد m واسطه حسابی قرار بدین. قدر نسبت رو می‌تونین از رابطه زیر بدست بیارین:

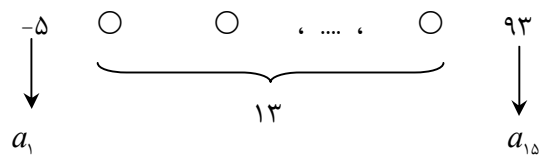


$$a_{m+2} - a_1 = (m+2-1)d = (m+1)d \Rightarrow b - a = (m+1)d \rightarrow$$

$$\Rightarrow d = \frac{b-a}{m+1} = \frac{\text{جمله آخر} - \text{جمله اول}}{\text{تعداد واسطه} + 1}$$

تقدیم به عاشقان فرمول:

سؤال ۵: بین دو عدد ۹۳ و -۵ به تعداد ۱۳ واسطه حسابی درج کرده ایم، سومین واسطه کدام است؟



$$a_{15} - a_1 = (15-1)d = 14d \Rightarrow 93 - (-5) = 14d \Rightarrow 98 = 14d \Rightarrow d = 7$$

-۵, ۲, ۹, ۱۶, ..., ۹۳

رابطه بین جملات یک دنباله حسابی با اندیس هایش:

در یک دنباله حسابی چه زمانی $a_m - a_n = a_k - a_L$ می‌شه:

$$\begin{cases} a_m - a_n = (m-n)d \\ a_k - a_L = (k-L)d \end{cases} \Rightarrow (m-n)d = (k-L)d \quad \boxed{m-n = k-L}$$

می‌دونیم:

پس اگر:

$$m - n = k - L \Leftrightarrow a_m - a_n = a_k - a_L$$

$$m + n = k + L \Leftrightarrow a_m + a_n = a_k + a_L$$

$$2 + 7 = 6 + 3 \Rightarrow a_2 + a_7 = a_6 + a_3$$

$$19 - 11 = 22 - 14 \Rightarrow a_{19} - a_{11} = a_{22} - a_{14}$$

$$3 + 5 = 4 + 4 \Rightarrow a_3 + a_5 = a_4 + a_4 = 2a_4$$

📖 فرم جمله عمومی یک دنباله حسابی:

$$a_n = a_1 + (n-1)d = a_1 + nd - d = (a_1 - d) + nd = A + Bn$$

که B قدر نسبت است.

📖 **سؤال ۶:** در یک دنباله حسابی $a_n = (k-3)n^2 + (k+2)n + 4 - k$ است. قدر نسبت این دنباله چقدر است؟

همون طور که دیدیم $a_n = A + Bn$ یعنی یک عبارت خطی درجه اول بر حسب n است پس:

$$k - 3 = 0 \rightarrow k = 3 \rightarrow a_n = 5n + 1 \rightarrow d = 5$$

📖 **سؤال ۷:** کدام یک از دنباله های زیر، دنباله حسابی است؟ (آزاد ۸۰)

$$n^2 + n \quad (4)$$

$$\frac{1}{n} \quad (3)$$

$$n^2 \quad (2)$$

$$8n + 1 \quad (1)$$

📖 **پاسخ:** گزینه (۱)

📖 **سؤال ۸:** در دنباله حسابی $2, \frac{7}{4}, \dots$ ، جملات a_4, a_8, a_{12}, \dots تشکیل دنباله حسابی دیگری می دهند. قدر نسبت این

دنباله چقدر است؟

$$2, \frac{7}{4}, \dots \Rightarrow d = \frac{7}{4} - 2 = -\frac{1}{4}$$

قدر نسبت دنباله جدید برابر $a_8 - a_4$ است.

$$d' = a_8 - a_4 \Rightarrow (8-4)d = 4d \Rightarrow 4\left(-\frac{1}{4}\right) = -1$$

📖 **سؤال ۹:** در یک دنباله حسابی $a_1 + a_4 + a_7 = 8$ و $a_4 + a_7 + a_{10} = 2$ ، قدر نسبت کدام است؟

$$\begin{cases} a_4 + a_7 + a_{10} = 2 \\ a_1 + a_4 + a_7 = 8 \end{cases}$$

$$\ominus \quad 3d + 3d + 3d = 2 - 8 \Rightarrow 9d = -6 \Rightarrow d = \frac{-6}{9} = -\frac{2}{3}$$

سؤال ۱۰: تفاضل جمله دهم از جمله دوازدهم یک دنباله عددی (حسابی) ۵ و مجموعه دو جمله دهم و دوازدهم ۲۵

است. جمله بیست و یکم این دنباله کدام است؟ (سراسری خارج از کشور ۸۴)

$$\begin{cases} a_{12} - a_{10} = 5 = 2d \Rightarrow d = \frac{5}{2} \\ a_{12} + a_{10} = 25 \end{cases}$$

$$\oplus 2a_{12} = 30 \Rightarrow a_{12} = 15 \Rightarrow a_{21} = a_{12} + 9d \Rightarrow 15 + 9\left(\frac{5}{2}\right) = 15 + \frac{45}{2} = \frac{75}{2}$$

سؤال ۱۱: چند جمله از دنباله حسابی $a_1 = 170$ و $a_r = 161$ مثبت است؟

$$d = a_r - a_1 = 161 - 170 = -9$$

$$a_n = 170 + (n-1)(-9) = -9n + 179 > 0$$

$$9n < 179 \rightarrow n < \frac{179}{9} = 19/... \rightarrow n \leq 19 \rightarrow 19 \text{ جمله مثبت دارد}$$

سؤال ۱۲: دنباله حسابی با جمله اول ۶۳ و قدر نسبت (-۴) چند جمله مثبت دارد؟

$$a_n = 63 + (n-1)(-4) = -4n + 67 > 0 \rightarrow 4n < 67 \rightarrow n < 16/... \rightarrow n \leq 16 \rightarrow 16 \text{ جمله مثبت دارد}$$

سؤال ۱۳: در یک دنباله حسابی مجموع چهار جمله اول ۱۵ و مجموع پنج جمله بعدی آن ۳۰ می‌باشد. جمله یازدهم

این دنباله کدام است؟

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 15 \\ a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = 30 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2a_2 + 2a_3 = 15 \\ 5a_5 = 30 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} (a_2 + a_3) = \frac{15}{2} \\ a_5 = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_1 + d + a_1 + 2d = \frac{15}{2} \\ a_1 + 4d = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 3d = \frac{15}{2} \\ a_1 + 4d = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_1 = 3 \\ d = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\rightarrow a_{11} = a_1 + 10d = 3 + 10\left(\frac{1}{2}\right) = 8$$

سؤال ۱۴: در دنباله حسابی $a_1 = 1$ ، $a_r = \frac{5}{3}$ حاصل $\frac{a_{15} + a_{17} + a_{19}}{a_{22} + a_{25} + a_{27}}$ کدام است؟

$$d = a_r - a_1 = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$$

$$\frac{a_{15} + a_{17} + a_{19}}{a_{22} + a_{25} + a_{27}} = \frac{3a_{17}}{3a_{25}} = \frac{a_{17}}{a_{25}} = \frac{a_1 + 16d}{a_1 + 34d} = \frac{1 + 16 \times \frac{2}{3}}{1 + 34 \times \frac{2}{3}} = \frac{\frac{35}{3}}{\frac{71}{3}} = \frac{35}{71}$$

سؤال ۱۵: در یک دنباله حسابی $a_7 = 9, a_1 = 5$ آنگاه $a_7 + a_8 + a_9$ چقدر است؟

$$\begin{cases} a_7 = 9 \\ a_1 = 5 \end{cases} \rightarrow a_7 - a_1 = (7-1)d \rightarrow 9 - 5 = 6d \rightarrow d = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$a_7 + a_8 + a_9 = 3a_8 = 3(a_7 + d) = 3(9 + \frac{2}{3}) = 3(10) = 30$$

سؤال ۱۶: در دنباله حسابی $a_7 = 5 + \sqrt{2}, a_1 = 3 + \sqrt{2}$ ، مجموع چهار جمله چهارم چقدر است؟

بیشتر است؟

$$d = a_7 - a_1 = 5 + \sqrt{2} - (3 + \sqrt{2}) = 2$$

مجموع چهار جمله چهارم $a_{13} + a_{14} + a_{15} + a_{16}$

مجموع چهار جمله دوم $a_5 + a_6 + a_7 + a_8$

$$(-) 4d + 4d + 4d + 4d = 16d = 16 \times 2 = 32$$

سؤال ۱۷: اگر در یک دنباله حسابی $a_1 + a_7 + a_{13} = 30$ باشد، جمله پنجم چقدر است؟

$$a_1 + a_7 + a_{13} = a_1 + 2a_7 = a_1 + 2(a_1 + 6d) = 30 \Rightarrow$$

$$3a_1 + 12d = 30 \Rightarrow a_1 + 4d = 10 \Rightarrow a_5 = 10$$

سؤال ۱۸: مجموع سه جمله اول یک دنباله حسابی، چهار برابر مجموع سه جمله بعدی آن است. جمله چندم این

دنباله برابر صفر است؟ (گزینه ۲)

$$a_1 + a_2 + a_3 = 4(a_4 + a_5 + a_6) \Rightarrow 3a_2 = 4(3a_4) \Rightarrow a_2 = 4a_4$$

$$\Rightarrow a_1 + d = 4(a_1 + 4d) = 4a_1 + 16d \Rightarrow 3a_1 + 15d = 0 \Rightarrow a_1 + 5d = 0 \Rightarrow a_6 = 0$$

سؤال ۱۹: اگر $2x + 3, 2x - 4, 2x + 1$ به ترتیب جملات اول و چهارم و هفتم یک دنباله عددی (حسابی) باشند

جمله دوم این دنباله چند است؟ (گزینه ۲)

$$a_1 + a_7 = 2a_4 \Rightarrow 2x + 1 + 2x + 3 = 2(2x - 4) \Rightarrow 4x + 4 = 4x - 8 \Rightarrow x = -12$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = -33 \\ a_7 = -28 \end{cases} \Rightarrow a_7 - a_1 = 3d \Rightarrow -28 - (-33) = 3d \Rightarrow 5 = 3d \Rightarrow d = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow a_2 = a_1 + d = -33 + \frac{5}{3} = -\frac{94}{3}$$

سؤال ۲۰: حاصل عبارت $\frac{1}{\sqrt{18} + \sqrt{14}} + \frac{1}{\sqrt{14} + \sqrt{20}} + \frac{1}{\sqrt{20} + \sqrt{26}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{92} + \sqrt{98}}$ را بیابید.

$$S = \frac{\sqrt{14} - \sqrt{18}}{6} + \frac{\sqrt{20} - \sqrt{14}}{6} + \frac{\sqrt{26} - \sqrt{20}}{6} + \dots + \frac{\sqrt{98} - \sqrt{92}}{6} = \frac{\sqrt{98} - \sqrt{18}}{6} = \frac{7\sqrt{2} - 3\sqrt{2}}{6} = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$



۱) هرگاه سه عدد تشکیل دنباله حسابی بدهند بهتر است آنها را به صورت $a-d, a, a+d$ در نظر بگیریم.

۲) هرگاه ۵ عدد تشکیل دنباله حسابی بدهند بهتر است آنها را به صورت $a-2d, a-d, a, a+d, a+2d$ نشان دهیم.

۳) هرگاه ۴ عدد تشکیل دنباله حسابی بدهند بهتر است آنها را به صورت $a-3b, a-b, a+b, a+3b$ نشان دهیم.

سؤال ۲۱: در یک دنباله حسابی مجموع سه جمله متوالی ۲۷ و مجموع مربعات آنها ۲۹۳ است. قدر نسبت دنباله چقدر

است؟

$$a-d+a+a+d=27 \rightarrow 3a=27 \rightarrow a=9$$

$$(a-d)^2+a^2+(a+d)^2=(a-d)^2+(a+d)^2+a^2=293$$

$$(a-b)^2+(a+b)^2=2(a^2+b^2)$$

$$\rightarrow 2(a^2+b^2)+a^2=293 \rightarrow 3a^2+2d^2=293 \rightarrow 3(9)^2+2d^2=293 \rightarrow 243+2d^2=293$$

$$\rightarrow 2d^2=293-243=50 \rightarrow d^2=25 \rightarrow d=\pm 5$$

سؤال ۲۲: در یک دنباله حسابی $a_5 - a_1 = 120, a_4 = 5$ است. قدر نسبت این دنباله کدام است؟

$$a_5 - a_1 = (a_5 - a_4)(a_4 + a_1) = (10 - 4)d \times 2a_4 = 120 \rightarrow 12d \times 5 = 120 \rightarrow 60d = 120 \rightarrow d = 2$$

سؤال ۲۳: در یک دنباله حسابی مجموع جملات سوم و هفتم و یازدهم برابر ۶- بوده و مجموع مربعات آنها ۳۰۰

می‌باشد. جملات دنباله را مشخص کنید.

$$a_3 + a_7 + a_{11} = -6 \rightarrow 3a_7 = -6 \rightarrow a_7 = -2 \rightarrow (a_7 - 4d)^2 + a_7^2 + (a_7 + 4d)^2 = 300$$

$$2(a_7^2 + (4d)^2) + a_7^2 = 300 \rightarrow 2(4 + 16d^2) + 4 = 300 \rightarrow 8 + 32d^2 + 4 = 300 \rightarrow 32d^2 = 288$$

$$\rightarrow d^2 = 9 \rightarrow d = \pm 3$$

$$\begin{cases} \begin{matrix} -4d & 4d \\ \swarrow & \searrow \\ a_3 & a_7 & a_{11} \\ & -2 & \end{matrix} & \begin{cases} d = 3 & -14, -2, 10 \\ d = -3 & 10, -2, -14 \end{cases} \end{cases}$$

سؤال ۲۴: زوایای داخلی یک پنج ضلعی محدب برحسب درجه تشکیل یک دنباله حسابی داده اند. اگر قدر نسبت

این دنباله ۴ درجه باشد کوچکترین زاویه داخلی کدام است؟

$$\text{مجموع زوایای ۵ ضلعی} = (5-2) \times 180 = 540$$

$$a-2d+a-d+a+a+d+a+2d=540 \Rightarrow 5a=540 \rightarrow a=\frac{540}{5}=108$$

$$\text{کوچکترین زاویه: } a-2d=108-2(4)=100$$

📖 جملات مشترک دو دنباله حسابی و ایجاد دنباله حسابی دیگر:

$$a_n: 2, \textcircled{5}, 8, \textcircled{11}, 14, \textcircled{17}, 20, \dots \quad d_1 = 3$$

$$b_n: -1, 1, 3, \textcircled{5}, 7, 9, \textcircled{11}, 13, 15, \textcircled{17}, \dots \quad d_2 = 2$$

اگر جمله های مشترک این دو دنباله رو کنار هم بذاریم یک دنباله حسابی جدید درست می شه:

$$C_n = 5, 11, 17, \dots \quad d = 6$$

تعمیم: جملات مشترک دنباله های a_n, b_n یک دنباله حسابی جدیدی به نام C_n ایجاد می کنن که قدرنسبت C_n ، ک.م.م قدر نسبت های a_n, b_n هستن.

📖 **سؤال ۲۵:** جملات مشترک دنباله های حسابی $\left. \begin{matrix} 1, 3, 5, \dots \\ 4, 9, 14, \dots \end{matrix} \right\}$ یک دنباله حسابی جدید ایجاد کرده اند. جمله بیست و

یکم دنباله جدید کدام است؟

$$\left. \begin{matrix} 1, 3, 5, 7, 9, \dots & d_1 = 2 \\ 4, 9, 14, \dots & d_2 = 5 \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\text{ک.م.م}} d = 10$$

$$C_n = 9, 19, 29, \dots \rightarrow a_{21} = a_1 + 20d = 9 + 20 \times 10 = 209$$

📖 **سؤال ۲۶:** صد و یک جمله اول دنباله حسابی $\dots, 6, 2, 2, -2$ با هشتاد و پنج جمله دنباله حسابی $\dots, 9, 4, -1$ چند جمله

مساوی دارند؟

$$\left. \begin{matrix} a_n: -2, 2, 6, 10, 14, 18, \dots & d_1 = 4 \\ b_n: -1, 4, 9, 14, 19, \dots & d_2 = 5 \end{matrix} \right\} \rightarrow d = 20$$

$$C_n: 14, 34, 54, \dots \rightarrow \text{جمله عمومی} = 14 + (n-1)20 = 20n - 6$$

$$a_n \text{ جمله صد و یکم} = -2 + 100(4) = 398$$

$$b_n \text{ جمله هشتاد و پنجم} = -1 + 84(5) = 419$$

از اونجایی که دنباله C_n از جملات مشترک a_n و b_n تشکیل شده، پس آخرین جمله C_n باید از آخرین جمله ی a_n و b_n کوچکتر یا مساوی باشه یعنی:

$$14 \leq C_n \leq 398 \rightarrow 14 \leq 20n - 6 \leq 398 \rightarrow 20 \leq 20n \leq 404 \rightarrow 1 \leq n \leq 20 / \text{ooooo}$$

$$\xrightarrow{n \in \mathbb{N}} 1 \leq n \leq 20 \xrightarrow{\text{تعداد جملات } C_n} 20$$

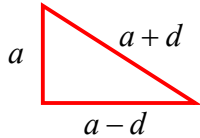
نمایش دنباله حسابی به صورت دنباله بازگشتی:

۱) $a_{n+1} - a_n = d \rightarrow$ (عددی ثابت)

$a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1}$ یا $2a_n = a_{n+1} + a_{n-1}$

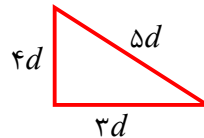
سؤال ۲۷: اگر اضلاع مثلث قائم الزاویه‌ای تشکیل دنباله حسابی دهند رابطه بین آنها را پیدا کنید؟

$a-d, a, a+d$



رابطه فیثاغورث $\rightarrow a^2 + (a-d)^2 = (a+d)^2$

$a^2 = (a+d)^2 - (a-d)^2 = 4ad \rightarrow a^2 = 4ad \rightarrow a = 4d$



$\left\{ \begin{array}{l} 1, 4, 7, \dots \\ 2, 6, 10, \dots \end{array} \right.$

سؤال ۲۸: دو دنباله حسابی روبرو چند جمله مشترک کوچکتر از ۱۰۰ دارند:

$\left\{ \begin{array}{l} 1, 4, 7, 10, \dots \quad d_1 = 3 \\ 2, 6, 10, 14, \dots \quad d_2 = 4 \end{array} \right. \rightarrow$ جمله اول مشترک = ۱۰, $d = ۱۲$

$C_n = 10 + 12(n-1) = 12n - 2$

$12n - 2 < 100 \rightarrow 12n < 102 \rightarrow n < \frac{102}{12} = 8.5$

$\rightarrow n \leq 8 \rightarrow$ هشت جمله مشترک کوچکتر از ۱۰۰ دارند

سؤال ۲۹: مجموع جملات مشترک دو دنباله حسابی زیر که کوچکتر از ۴۵۹ و بزرگتر از ۳۵۹ هستند، کدام است؟

$\left\{ \begin{array}{l} 1, 7, 13, \dots \\ 1, 8, 15, \dots \end{array} \right.$

$\left. \begin{array}{l} d_1 = 6 \\ d_2 = 7 \end{array} \right\} \rightarrow d = 42$ و ۱ برابر مشترک اولین جمله مشترک $C_n = 1 + 42(n-1) = 42n - 41$

$\rightarrow 400 < 42n < 500 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} 10 \leq n \leq 11 \rightarrow n = 10, 11$

$\left. \begin{array}{l} n = 10 \rightarrow C_n = 42(10) - 41 = 420 - 41 = 379 \\ n = 11 \rightarrow C_n = 42(11) - 41 = 462 - 41 = 421 \end{array} \right\} \rightarrow 379 + 421 = 800$

سؤال ۳۰: در یک دنباله حسابی صعودی، جمله های سوم و پنجم معکوس هم هستند. اگر مجموع مربعات جمله چهارم و قدر نسبت برابر ۵ باشد، قدر نسبت این دنباله کدام است.

۲ (۴)

$\sqrt{3}$ (۳)

۱/۵ (۲)

$\sqrt{2}$ (۱)

$a_3 a_5 = 1 \Rightarrow (a_4 - d)(a_4 + d) = 1 \Rightarrow a_4^2 - d^2 = 1$

$\left\{ \begin{array}{l} a_4^2 - d^2 = 1 \\ a_4^2 + d^2 = 15 \end{array} \right. \Rightarrow 2d^2 = 4 \Rightarrow d^2 = 2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d = \sqrt{2} \\ d = -\sqrt{2} \end{array} \right.$

چون دنباله صعودی است، فقط $d = \sqrt{2}$ قابل قبول است.

دنباله هندسی و ترکیب آن با دنباله حسابی



دنباله هندسی:

$$\begin{array}{ccccccc} & \times 2 & & \times 2 & & \times 2 & \\ \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \\ 2 & , & 4 & , & 8 & , & 16 & , \dots \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & \times 3 & & \times 3 & & \times 3 & \\ \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \\ 1 & , & 3 & , & 9 & , & 27 & , \dots \end{array}$$

به دسته ای از اعداد که تقسیم هر جمله به جمله ماقبلش برابر با مقدار ثابتی بشه دنباله هندسی می‌گیم. به این مقدار ثابت می‌کنیم قدرت نسبت دنباله هندسی و با q نشان می‌دهیم:

در یک دنباله‌ی هندسی اگر $q > 0$ باشه دنباله یکنوا و اگر $q < 0$ باشه دنباله غیریکنواست.

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ q = \frac{1}{2} > 0 \end{cases} \quad \begin{array}{ccccccc} & \rightarrow & & \rightarrow & & \rightarrow & \\ 2 & , & 1 & , & \frac{1}{2} & , & \frac{1}{4} & , & \frac{1}{8} & , \dots \end{array} \quad \text{(دنباله اکیدا یکنواست)}$$

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ q = -\frac{1}{2} < 0 \end{cases} \quad \begin{array}{ccccccc} & \rightarrow & & \rightarrow & & \rightarrow & \\ 2 & , & -1 & , & \frac{1}{2} & , & -\frac{1}{4} & , & \frac{1}{8} & , \dots \end{array} \quad \text{(دنباله غیریکنواست)}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & \times q & & \times q & & \times q & \\ \curvearrowright & & \curvearrowright & & \curvearrowright & & \\ a_1 & , & a_2 & , & a_3 & , & a_4 & , \dots & a_n \end{array}$$

اگر a_1 رو در q ضرب کنیم a_2 بوجود می‌آید $a_2 = a_1 q^1$
 اگر a_1 رو در q^2 ضرب کنیم a_3 بوجود می‌آید $a_3 = a_1 q^2$
 اگر a_1 رو در q^3 ضرب کنیم a_4 بوجود می‌آید $a_4 = a_1 q^3$
 ...
 اگر a_1 رو در a^{n-1} ضرب کنیم a_n بوجود می‌آید $a_n = a_1 q^{n-1}$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

سؤال ۱: در یک دنباله هندسی $a_1 = 5$ و $q = 2$ می‌باشد. جمله هفتم این دنباله کدام است؟

$$a_7 = a_1 q^6 = 5 \times 2^6 = 5 \times 64 = 320$$

سؤال ۲: در یک دنباله هندسی غیریکنوا ($q < 0$)، $a_1 = 4$ و $a_7 = 256$ می‌باشد. جمله دهم این دنباله کدام است؟

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_7 = 256 \end{cases} \rightarrow a_1 q^6 = 256 \rightarrow 4q^6 = 256 \rightarrow q^6 = 64 \rightarrow q = \pm 2 \xrightarrow[\text{دنباله غیر یکنوا } a < 0]{\text{دنباله غیر یکنوا}} q = -2 \rightarrow a_{10} = a_1 q^9 \rightarrow 4(-2)^9 = -2048$$

یافتن قدرنسبت یک دنباله هندسی با معلوم بودن دو جمله دلخواه:

$$\begin{array}{c} \times q \quad \times q \quad \times q \\ \curvearrowright \quad \curvearrowright \quad \curvearrowright \\ a_1, a_r, a_r, \dots, a_n \end{array}$$

بچه ها! به دنباله هندسی مقابل نگاه کنید:

$$\frac{a_r}{a_1} = q^r \quad \frac{a_r}{a_r} = q^{(r-r)} = q^0 \quad \frac{a_m}{a_r} = q^{\Delta} = q^{(m-r)} \Rightarrow \frac{a_m}{a_n} = q^{m-n} \text{ یا } a_m = a_n q^{m-n}$$

سؤال ۳: در یک دنباله هندسی غیریکنوا ($q < 0$)، $a_r = 3$ و $a_4 = 243$ قدرنسبت این دنباله چیست؟

$$\frac{a_4}{a_r} = q^r \rightarrow \frac{243}{3} = q^r = 81 = q^r \rightarrow q = \pm 3 \xrightarrow{q < 0} q = -3$$

سؤال ۴: در یک دنباله هندسی غیریکنوا ($q < 0$)، $a_1 = 4$ و $a_7 = 256$ می باشد جمله دهم این دنباله کدام است؟

$$\frac{a_7}{a_1} = q^6 \rightarrow \frac{256}{4} = q^6 \rightarrow 64 = q^6 \rightarrow q = \pm 2 \xrightarrow{q < 0} q = -2$$

$$a_{10} = a_7 q^3 = 256 \times (-2)^3 = 2^8 \times -2^3 = -2^{11} = -2048$$

رابطه بین جملات یک دنباله هندسی با اندیس هایش:

بچه ها! می‌خواهیم بدونیم در یک دنباله هندسی چه زمانی $\frac{a_m}{a_n} = \frac{a_k}{a_L}$ می‌شه. پس نگاه کنین.

$$\begin{cases} \frac{a_m}{a_n} = q^{m-n} \\ \frac{a_k}{a_L} = q^{k-L} \end{cases} \xrightarrow{m-n=k-L} \frac{a_m}{a_n} = \frac{a_k}{a_L}$$

$$\begin{aligned} m-n = k-L &\Leftrightarrow \frac{a_m}{a_n} = \frac{a_k}{a_L} \\ m+n = k+L &\Leftrightarrow a_m \cdot a_n = a_k \cdot a_L \end{aligned}$$

$$28-9 = 22-3 \Leftrightarrow \frac{a_{28}}{a_9} = \frac{a_{22}}{a_3}$$

$$5-3 = 20-18 \Leftrightarrow \frac{a_5}{a_3} = \frac{a_{20}}{a_{18}}$$

$$7+9 = 3+13 \Leftrightarrow a_7 \cdot a_9 = a_3 \cdot a_{13}$$

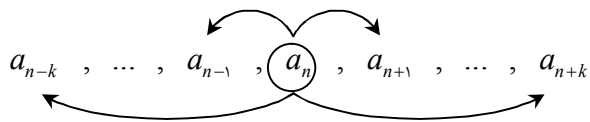
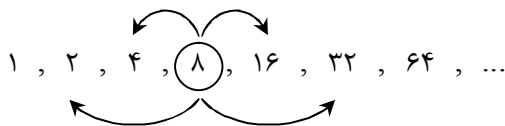
$$3+7 = 5+5 \Leftrightarrow a_3 \cdot a_7 = a_5 \cdot a_5 = a_5^2$$

سؤال ۵: در یک دنباله هندسی حاصل $a_5 \times a_6 \times a_7 \times a_8 \times a_9$ چند است؟

$$= (a_5 \times a_9) \times (a_6 \times a_8) \times a_7 = (a_7)^2 \cdot (a_7)^2 \cdot (a_7) = (a_7)^5$$

واسطه هندسی:

به دنباله هندسی روبه رو نگاه کنین:



$$a_n^{\vee} = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

$$a_n^{\vee} = a_{n-2} \cdot a_{n+2}$$

⋮

$$a_n^{\vee} = a_{n-k} \cdot a_{n+k}$$

سؤال ۶: در دنباله هندسی $4, n, n-1, \frac{m+1}{4}$ حاصل $m+2n$ کدام است؟

$$n^2 = 4(n-1) \rightarrow n^2 - 4n + 4 = 0 \rightarrow (n-2)^2 = 0 \rightarrow n = 2$$

$$\text{دنباله: } 4, 2, 1, \frac{m+1}{4}$$

$$2 \times \frac{m+1}{4} = 1^2 \rightarrow \frac{m+1}{2} = 1 \rightarrow m+1 = 2 \rightarrow m = 1 \rightarrow m+2n = 1+2(2) = 5$$

قرار دادن تعدادی واسطه هندسی بین دو عدد:

پنج واسطه هندسی بین دو عدد ۲ و ۱۲۸ قرار دهید.

$$\underbrace{2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 128}_{\text{جمله ۵}}$$

$$\frac{a_6}{a_1} = \frac{128}{2} = 64 = q^5 \rightarrow q = \pm 2$$

$$\begin{cases} q = 2 \rightarrow 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 \\ q = -2 \rightarrow 2, -4, 8, -16, 32, -64, 128 \end{cases}$$

در حالت کلی اگر بخواهیم بین دو عدد a, b به تعداد m واسطه هندسی قرار دهید کافیست قدر نسبت رو از رابطه زیر بدست بیارین:

$$\underbrace{a \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad n}_{m}$$

$$\frac{a_{m+2}}{a_1} = q^{m+2-1} = q^{m+1} \rightarrow \frac{b}{a} = q^{m+1}$$

فرم کلی دنباله هندسی:

اگر جمله عمومی رشته ای از اعداد به صورت $a_n = A(B)^{kn+p}$ باشد آن اعداد تشکیل دنباله هندسی می دهند و قدر نسبت این

دنباله B^k است. به عنوان مثال در $a_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{4n-1}$ داریم: $q = \left(\frac{1}{2}\right)^4$

نشان دادن دنباله هندسی به صورت دنباله بازگشتی:

۱) $\frac{a_n}{a_{n-1}} = q$ (ثابت)

۲) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ یا $a_n^2 = a_{n+1} \cdot a_{n-1}$

مقایسه دنباله حسابی با دنباله هندسی:

۱) علامت (+) در دنباله حسابی به صورت علامت (x) در دنباله هندسی ظاهر می شود:

$a_1 + d \longrightarrow a_1 \times q$ دنباله هندسی

۲) ضریب قدرنسبت در دنباله حسابی به صورت توان قدرنسبت در دنباله هندسی ظاهر می شود:

$d \longrightarrow q^d$ دنباله هندسی

۳) علامت منفی (-) در دنباله عددی به علامت (÷) در دنباله هندسی ظاهر می شود.

$a_m - a_n = 2d \longrightarrow \frac{a_m}{a_n} = q^2$ دنباله هندسی

دنباله عددی	دنباله هندسی
+	×
ضرب	توان
-	تقسیم

دنباله حسابی	دنباله هندسی
$2y = x + z$	$y^2 = xy$
$a_n - a_{n-1} = d$	$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q$
$a_m - a_n = (m - n)d$	$\frac{a_m}{a_n} = q^{m-n}$
$2a_n = a_{n-k} + a_{n+k}$	$a_n^2 = a_{n-k} \cdot a_{n+k}$
$m + n = K + L \rightarrow a_m + a_n = a_K + a_L$	$m + n = K + L \rightarrow a_m \cdot a_n = a_K \cdot a_L$
$m - n = K - L \rightarrow a_m - a_n = a_K - a_L$	$m - n = K - L \rightarrow \frac{a_m}{a_n} = \frac{a_K}{a_L}$
$(m + 1)d = b - a$	$q^{m+1} = \frac{b}{a}$

اگر ۳ جمله غیرمتوالی از یک دنباله حسابی، تشکیل یک دنباله هندسی را بدهند:

سؤال ۷: جملات چهارم و ششم و دوازدهم یک دنباله حسابی، به ترتیب و در کنار هم یک دنباله هندسی را تشکیل داده اند. قدر نسبت دنباله هندسی ایجاد شده چیست؟

دنباله حسابی: $a_4, \dots, a_6, \dots, a_{12}$

دنباله هندسی: a_4, a_6, a_{12}

$$\rightarrow a_6^2 = a_4 \times a_{12} \rightarrow (a_1 + 5d)^2 = (a_1 + 3d)(a_1 + 11d)$$

$$\rightarrow a_1^2 + 10a_1d + 25d^2 = a_1^2 + 11a_1d + 3a_1d + 33d^2 \rightarrow -4a_1d = 8d^2 \rightarrow -a_1 = 2d \text{ یا } a_1 = -2d$$

a_4	a_6	a_{12}
↓	↓	↓
$a_1 + 3d$	$a_1 + 5d$	$a_1 + 11d$
$-2d + 3d = d$	$-2d + 5d = 3d$	$-2d + 11d = 9d$
↓	↓	↓
d	$3d$	$9d$
← $q = 3$		← $q = 3$

چقدر طولانی بود می شه این جوری هم q رو بدست آورد:

$$a_4, a_6, a_{12} \rightarrow q = \frac{12-6}{6-4} = \frac{6}{2} = 3$$

که روش تستی: در دنباله حسابی $a_m, \dots, a_n, \dots, a_k$. اگر جملات a_m, a_n, a_k تشکیل دنباله هندسی رو بدن. قدر نسبت دنباله هندسی ایجاد شده برابر است با:

$$q = \frac{k-n}{n-m}$$

سؤال ۸: در یک دنباله حسابی جملات دو م و پنجم و چهاردهم به ترتیب تشکیل دنباله هندسی با قدر نسبت q را داده اند. مقدار q کدام است؟

$$a_2, a_5, a_{14} \rightarrow q = \frac{14-5}{5-2} = \frac{9}{3} = 3$$

سؤال ۹: در یک دنباله حسابی جملات سوم و هفتم و نهم، سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی می باشند. چندمین جملهی این تصاعد عددی، صفر است؟ (سراسری ۸۸)

$$a_3, a_7, a_9 \rightarrow q = \frac{9-7}{7-3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

a_3	a_7	a_9
$a_1 + 2d$	$a_1 + 6d$	$a_1 + 8d$

$$\frac{a_7}{a_3} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{a_1 + 6d}{a_1 + 2d} = \frac{1}{2} \rightarrow 2a_1 + 12d = a_1 + 2d \rightarrow a_1 + 10d = 0 \rightarrow a_{11} = 0$$

سؤال ۱۰: اگر جمله اول و دوم و ششم از یک دنباله حسابی با سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی برابر باشند. قدرنسبت دنباله هندسی برابر است با.....

$$a_1, a_2, a_6 \rightarrow q = \frac{6-2}{2-1} = \frac{4}{1} = 4$$

سؤال ۱۱: در یک دنباله هندسی، حاصل ضرب هفت جمله اولیه برابر ۱۲۸ است. جمله چهارم چقدر است؟

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 = (a_1 a_7)(a_2 a_6)(a_3 a_5) a_4 = a_4^2 \cdot a_4^2 \cdot a_4^2 \cdot a_4 = a_4^7 = 128 = 2^7 \rightarrow a_4 = 2$$

سؤال ۱۲: اگر a_1, a_2, a_3 سه جمله اول یک دنباله هندسی باشند ($q = 2$) کدام گزینه سه جمله اول یک دنباله هندسی هستند؟ (آزاد ۸۱)

$$(2) \quad a_1 + 1, a_2 + 4, a_3 + 16$$

$$(1) \quad a_1 + 1, a_2 + a_1, a_3 + a_2$$

$$(4) \quad a_1 + 1, a_2 + 2, a_3 + 4$$

$$(3) \quad a_1 + 1, a_2 + 2, a_3 + 2$$

پاسخ: گزینه (۴)

عدد می گذاریم $a_1, a_2, a_3 = 1, 2, 4$

گزینه ۱: ۲, ۳, ۶

گزینه ۲: ۲, ۶, ۲۰

گزینه ۳: ۲, ۴, ۶

گزینه ۴: ۲, ۴, ۸

سؤال ۱۳: در یک دنباله هندسی صعودی ($q > 0$) جمله سوم ۱۰ و جمله هفتم ۴۰ است. جمله اول کدام است؟

$$\begin{cases} a_3 = 10 \\ a_7 = 40 \end{cases} \rightarrow \frac{a_7}{a_3} = q^4 = 4 \rightarrow q = \pm \sqrt[4]{2^2} \xrightarrow{q > 0} q = \sqrt{2}$$

$$a_3 = a_1 q^2 \rightarrow 10 = a_1 (\sqrt{2})^2 = 2a_1 \rightarrow a_1 = 5$$

سؤال ۱۴: در یک دنباله هندسی $a_2 a_4 = 2a_5$ ، جمله اول کدام است؟

$$a_2^2 = 2a_5 \rightarrow (a_1 q)^2 = 2a_1 q^4 \rightarrow a_1^2 q^2 = 2a_1 q^4 \rightarrow a_1^2 = 2a_1 \rightarrow a_1^2 - 2a_1 = 0$$

$$\rightarrow a_1(a_1 - 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \text{ غ ق} \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

سؤال ۱۵: بزرگترین جمله دنباله هندسی $\frac{1}{3}, b, \frac{1}{c}, d, \frac{1}{24}$ کدام است؟

$$a_2 = \frac{1}{3}, \quad a_5 = \frac{1}{24}$$

$$\rightarrow \frac{a_5}{a_2} = \frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{8} = q^3 \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^3 = q^3 \rightarrow q = \frac{1}{2}$$

دنباله نزولی است پس بزرگترین جمله دنباله جمله اول آن (a) است.

$$a_2 = a q \rightarrow \frac{1}{3} = a \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{2} \rightarrow a = \frac{2}{3}$$

سؤال ۱۶: در یک دنباله هندسی مجموع جملات اول و سوم برابر ۱ و مجموع چهار جمله اول آن ۳ می‌باشد. جمله ششم دنباله کدام است؟

$$a_1 + a_3 = 1 \rightarrow a_1 + a_1 q^2 = 1 \rightarrow a_1(1 + q^2) = 1 \quad (1)$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 = 3 \rightarrow a_1(1 + q + q^2 + q^3) = 3 \rightarrow 1 + 1 \times q = 3$$

$$1 + q = 3 \rightarrow q = 2 \xrightarrow{\text{جایگذاری (۱)}} a_1(1 + 2^2) = 1 \rightarrow a_1 = \frac{1}{5} \rightarrow a_6 = a_1 q^5 = \frac{1}{5} \times 2^5 = \frac{32}{5}$$

سؤال ۱۷: بین ۲ و $16\sqrt{2}$ شش عدد چنان درج شده اند که هشت عدد حاصل، دنباله هندسی تشکیل داده اند جمله ۵ ام دنباله جدید کدام است؟

$$\begin{array}{cccccccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \\ \downarrow a_1 & & & & & & & \downarrow a_8 \end{array}$$

$$\rightarrow \frac{a_8}{a_1} = q^7 = \frac{16}{2} = 8 \rightarrow q = \sqrt[7]{8} \rightarrow a_5 = a_1 q^4 = 2 \sqrt[7]{8^4} = 2 \sqrt[7]{2^{28}} = 2 \sqrt[7]{2^7 \times 2^5} = 2 \times 2 \times \sqrt[7]{2^5} = 4 \sqrt[7]{2^5}$$

سؤال ۱۸: بین دو عدد ۳ و ۲۴ دو واسطه هندسی درج کرده ایم. مجموع دو واسطه هندسی کدام است؟

(آموزش و پرورش)

$$\begin{array}{ccc} 3 & 0 & 24 \\ \downarrow a_1 & & \downarrow a_3 \end{array}$$

$$\frac{a_3}{a_1} = q^2 = \frac{24}{3} = 8 = 2^3 \rightarrow q = 2$$

$$3, 6, 12, 24 \rightarrow 6 + 12 = 18$$

سؤال ۱۹: در یک دنباله هندسی مجموع جملات اول و چهارم برابر ۲۸ و مجموع جملات دوم و سوم برابر ۱۲ می‌باشد. قدر نسبت دنباله کدام است؟ (گزینه ۲)

$$a_1 + a_4 = 28 \rightarrow a_1 + a_1 q^3 = 28 \rightarrow a_1(1 + q^3) = 28 \quad (1)$$

$$a_2 + a_3 = 12 \rightarrow a_1 q + a_1 q^2 = 12 \rightarrow a_1 q(1 + q) = 12 \quad (2)$$

$$(1) \text{ را بر } (2) \text{ تقسیم می کنیم: } \frac{a_1(1 + q^3)}{a_1 q(1 + q)} = \frac{a_1(1 + q)(1 - q + q^2)}{a_1 q(1 + q)} = \frac{28}{12} = \frac{7}{3} \rightarrow \frac{1 - q + q^2}{q} = \frac{7}{3}$$

$$\rightarrow 3 - 3q + 3q^2 = 7q \rightarrow 3q^2 - 10q + 3 = 0$$

$$\text{تجزیه تستی} \quad \boxed{\begin{array}{l} q^2 - 10q + 9 = 0 \rightarrow (q-1)(q-9) \\ \rightarrow 3q^2 - 10q + 3 = (3q-1)(q-3) \end{array}}$$

$$\rightarrow (3q-1)(q-3) = 0 \rightarrow \begin{cases} q = \frac{1}{3} \\ q = 3 \end{cases}$$

سؤال ۲۰: اگر جمله پنجم یک دنباله هندسی برابر ۴۸ و جمله هشتم آن دنباله برابر ۳۸۴ باشد جمله چهارم دنباله کدام است؟ (گزینه ۲)

$$\left. \begin{array}{l} a_5 = 48 \\ a_8 = 384 \end{array} \right\} \rightarrow \frac{a_8}{a_5} = q^3 = \frac{384}{48} = \frac{16 \times 24}{24 \times 2} = 8 = 2^3 \rightarrow q = 2$$

$$\rightarrow a_5 = a_4 \cdot q \rightarrow 48 = a_4 \times 2 \rightarrow a_4 = 24$$

سؤال ۲۱: بین ۲ و ۱۶۲ سه جمله چنان درج کرده ایم که ۵ عدد تشکیل دنباله هندسی می دهند. جمع آن سه جمله چقدر است؟ (گزینه ۲)

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & & 0 & & 0 & & 0 & & 162 \\ \downarrow & & & & & & & & \downarrow \\ a_1 & & & & & & & & a_5 \end{array}$$

$$\frac{a_5}{a_1} = q^4 = \frac{162}{2} = 81 = 3^4 \rightarrow q^4 = 3^4 \rightarrow q = 3$$

۲, ۶, ۱۸, ۵۴, ۱۶۲

$$6 + 18 + 54 = 78$$

سؤال ۲۲: در یک دنباله هندسی $a_1 + a_2 + a_3 = -18$ و $a_2 + a_3 + a_4 = 36$ حاصل $a_3 - a_4 + a_5$ کدام است؟

$$a_1 + a_1q + a_1q^2 = -18 \rightarrow a_1(1 + q + q^2) = -18 \quad (1)$$

$$a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 = 36 \rightarrow a_1q(1 + q + q^2) = 36 \quad (2)$$

در رابطه (۱) قرار می دهیم $\rightarrow a_1(1 - 2 + 4) = -18$

$$\frac{a_1q}{a_1} = -2 \rightarrow q = -2 \rightarrow a_1(1 - 2 + 4) = -18$$

$$\rightarrow 3a_1 = -18 \rightarrow a_1 = -6 \rightarrow a_3 - a_4 + a_5 = a_1q^2 - a_1q^3 + a_1q^4 = a_1q^2(1 - q + q^2)$$

$$\rightarrow (-6)(-2)(1 + 2 + 4) = 12 \times 9 = 108$$

حاصل ضرب n جمله اول یک دنباله هندسی:

$$P_n = a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_{n-2} \times a_{n-1} \times a_n$$

$$P_n = (a_1 a_n) \times (a_2 a_{n-1}) \times (a_3 a_{n-2}) \times \dots \times ()$$

$$P_n = \underbrace{(a_1 a_n) \times (a_2 a_{n-1}) \times (a_3 a_{n-2}) \times \dots \times (a_1 a_n)}_{\frac{n}{2}} \Rightarrow P_n = (a_1 a_n)^{\frac{n}{2}}$$

جمله اول جمله آخر

مثال: $P_{25} = (a_1 a_{25})^{25}$

مثال: $P_{25} = (a_1 a_{25})^{\frac{25}{2}} \xrightarrow{1+25=1+1+1} P_{25} = (a_{18} \times a_{18})^{\frac{25}{2}} = (a_{18}^2)^{\frac{25}{2}} = (a_{18})^{25}$

سؤال ۲۳: در یک دنباله هندسی $a_1 = 3$ و $q = 2$ می‌باشد. حاصل ضرب ۱۰ جمله اول این دنباله چیست؟

$$P_{10} = (a_1 a_{10})^5$$

$$a_{10} = a_1 q^9 = 3(2)^9 \Rightarrow P_{10} = (3 \times 3 \times 2^9)^5 = 3^{10} \times 2^{45}$$

سؤال ۲۴: بین اعداد ۲ و ۵۰ حداقل چند واسطه هندسی قرار دهیم تا حاصل ضرب تمام جملات دنباله تشکیل شده

بیشتر از ۱۰۰۰۰۰۰ باشد؟

$$\text{تعداد جملات} = m + 2 - 1 + 1 = m + 2$$

$$\underbrace{2 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0}_{m} \quad \begin{matrix} 50 \\ \downarrow \\ a_{m+2} \end{matrix}$$

$$a_1 \times a_2 \times \dots \times a_{m+2} = (a_1 a_{m+2})(a_2 a_{m+1}) \dots > 10^6 \Rightarrow (2 \times 50)^{\frac{m+2}{2}} > 10^6 \Rightarrow (100)^{\frac{m+2}{2}} > 10^6$$

$$\Rightarrow (10^2)^{\frac{m+2}{2}} > 10^6 \Rightarrow 10^{m+2} > 10^6 \Rightarrow m + 2 > 6 \Rightarrow m > 4 \Rightarrow m \geq 5$$

سؤال ۲۵: سه جمله اول یک دنباله هندسی مفروض اند. اگر بین جملات اول و دوم، ۲ جمله و بین جملات دوم و سوم

پنج جمله درج کنیم، ۱۰ جمله متوالی از یک دنباله حسابی بدست می‌آید. قدرنسبت دنباله هندسی چیست؟

$$\underbrace{a \quad 0 \quad 0 \quad b \quad * \quad * \quad * \quad * \quad * \quad c}_{\text{دنباله حسابی}}$$

باید یه کم فسفر بسوزونیم! این سؤال را به صورت زیر می‌توان طرح کرد:

«جملات اول و چهارم و دهم یک دنباله حسابی به ترتیب ۳ جمله از یک دنباله هندسی می‌باشند، قدرنسبت، دنباله هندسی چیست.»

$$a_1, a_4, a_{10} \rightarrow q = \frac{10-4}{4-1} = \frac{6}{3} = 2$$

سؤال ۲۶: دنباله ثابت هم حسابی و هم هندسی است؟

$$\text{حسابی: } c, c, c, c, c, \dots, c \Rightarrow d = 0$$

$$\text{هندسی: } c, c, c, c, c, \dots, c \Rightarrow q = 1$$

سؤال ۲۷: جملات سوم و ششم و پانزدهم یک دنباله حسابی به ترتیب سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی اند.

مجموع دو جمله اول دنباله حسابی چند است؟

$$a_3, a_6, a_{15} \Rightarrow q = \frac{15-6}{6-3} = \frac{9}{3} = 3$$

$$a_1 + 2d, a_1 + 5d, a_1 + 14d \Rightarrow \frac{a_1 + 5d}{a_1 + 2d} = 3 \Rightarrow a_1 + 5d = 3a_1 + 6d \Rightarrow d = -2a_1$$

$$a_1 + a_3 = a_1 + a_1 + d = 2a_1 - 2a_1 = 0$$

سؤال ۲۸: حاصل ضرب پنج جمله متوالی یک دنباله هندسی $۱۲۸\sqrt{۲}$ و بزرگترین جمله آن $۴\sqrt{۲}$ است. این دنباله

را مشخص کنید؟

$$\frac{a}{q^r} \cdot \frac{a}{q} \cdot a \cdot aq \cdot aq^2 = 128\sqrt{2} \rightarrow a^5 = 2^7 \times \sqrt{2} = \sqrt{2^{15}} \rightarrow a^5 = (\sqrt{2})^{15} \rightarrow a = (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$$

بزرگترین جمله aq^r یا $\frac{a}{q^r}$ است.

$$۱) aq^r = 4\sqrt{2} \rightarrow 2\sqrt{2}q^r = 4\sqrt{2} \rightarrow q^r = 2 \rightarrow q = \pm\sqrt{2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2} \\ -\sqrt{2}, -2, 2\sqrt{2}, -4, 4\sqrt{2} \end{cases}$$

$$۲) \frac{a}{q^r} = 4\sqrt{2} \rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{q^r} = 4\sqrt{2} \rightarrow 4q^r = 1 \rightarrow q^r = \frac{1}{4} \rightarrow q = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 4\sqrt{2}, 4, 2\sqrt{2}, 2, \sqrt{2} \\ 4\sqrt{2}, -4, 2\sqrt{2}, -2, \sqrt{2} \end{cases}$$

سؤال ۲۹: مجموع سه جمله متوالی یک دنباله هندسی $۴\sqrt{۶} + ۳\sqrt{۲}$ و جمله وسطی $۳\sqrt{۲}$ است. قدر نسبت را

بیابید؟

$$\frac{a}{q} + a + aq = 4\sqrt{6} + 3\sqrt{2} \xrightarrow{a=3\sqrt{2}} \frac{a}{q} + 3\sqrt{2} + aq = \frac{3\sqrt{2}}{q} + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}q = 4\sqrt{6} + 3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{2}\left(\frac{1}{q} + q\right) = 4\sqrt{6} \Rightarrow q + \frac{1}{q} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \Rightarrow 3q^2 - 4\sqrt{3}q + 3 = 0 \Rightarrow q = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{12-9}}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{3}}{3} = \begin{cases} \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

سؤال ۳۰: در یک دنباله هندسی $a_7 + a_8 = 10$ و $a_7 + a_8 = \frac{10}{27}$ ، جمله هشتم این دنباله را بیابید؟

$$\begin{cases} a_7 + a_8 = 10 \\ a_7 q + a_8 q^2 = \frac{10}{27} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_7(1+q) = 10 \\ a_7 q^2 (q^{-1} + 1) = \frac{10}{27} \end{cases} \xrightarrow{\div} \frac{1}{q^2} = 27 = 3^3 \rightarrow q^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \rightarrow q = \frac{1}{3}$$

$$a_7 \left(\frac{1}{3}\right) \left(1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2\right) = 10 \rightarrow \frac{1}{3} a_7 \left(1 + \frac{1}{9}\right) = 10 \rightarrow \frac{1}{3} a_7 \left(\frac{10}{9}\right) = 10 \rightarrow a_7 = 27$$

$$a_8 = a_7 q = 27 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 3^3 \times \frac{1}{3^2} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3^1}$$

سؤال ۳۱: در یک دنباله هندسی $a_1 a_2 a_3 a_4 = 108$ و $a_2 a_3 = 162$ قدر نسبت و جمله اول را پیدا کنید؟

$$a_1 a_2 a_3 a_4 = (a_1 a_2) \cdot (a_3 a_4) = a_1^2 \cdot a_2^2 = (a_1 q)^2 (a_1 q^3)^2 = a_1^4 q^6 = 108 \quad (1) \xrightarrow{\text{جذر}} a_1^2 q^3 = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$$

$$a_2 a_3 = a_1^2 q^4 = 162 \quad (2) \rightarrow a_1^2 q^4 = 162 \rightarrow \frac{a_1^2 q^4}{a_1^2 q^3} = \frac{162}{6\sqrt{3}} \rightarrow q = \frac{27}{\sqrt{3}} = \frac{3^3}{\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3})^6}{\sqrt{3}} \rightarrow (\sqrt{3})^5$$

$$\rightarrow q = \sqrt{3} \xrightarrow{\text{با جایگذاری}} a_1 = \pm\sqrt{2}$$

سؤال ۳۲: در یک دنباله هندسی حاصل ضرب سه جمله متوالی -1000 و مجموع آنها 15 است. قدر نسبت را پیدا کنید؟

$$\frac{a}{q} \cdot a \cdot aq = -1000 \rightarrow a^3 = (-10)^3 \rightarrow a = -10$$

$$\frac{a}{q} + a + aq = 15 \rightarrow \frac{-10}{q} - 10 - 10q = 15 \rightarrow \frac{2}{q} + 2 + 2q = -3 \rightarrow 2 + 2q + 2q^2 = -3q$$

$$2q^2 + 5a + 2 = 0 \rightarrow (q+2)(2q+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} q = -2 \\ q = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

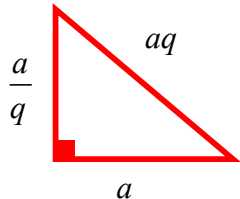
سؤال ۳۳: بین دو عدد a^5, a^{12} ($a > 0$) چه تعداد واسطه هندسی با قدر نسبت \sqrt{a} می توان قرار داد؟

$$a^{\frac{5}{m+1}} \quad \underbrace{O \quad O \quad O \quad \dots \quad O}_m \quad a^{\frac{12}{m+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{a^{m+2}}{a_1} = q^{m+1} = \frac{a^{12}}{a^5}, q = \sqrt{a} \Rightarrow (\sqrt{a})^{m+1} = a^{\frac{7}{m+1}} \xrightarrow{\text{به توان 2}} a^{m+1} = a^{14} \Rightarrow m+1 = 14 \Rightarrow m = 13$$

سؤال ۳۴: مثلث قائم الزاویه، طول ضلع ها تشکیل دنباله هندسی می دهند. در این مثلث وتر چند برابر ضلع کوچک است.

کوچک است.



$$\frac{\text{وتر}}{\text{ضلع کوچکتر}} = \frac{aq}{\frac{a}{q}} = q^2$$

$\frac{5}{3}$ (۱)

$\sqrt{5}$ (۲)

$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (۳)

$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (۴)

$$\left(\frac{a}{q}\right)^2 + a^2 = (aq)^2 \Rightarrow \frac{a^2}{q^2} + a^2 = a^2 q^2 \Rightarrow \frac{1}{q^2} + 1 = q^2 \xrightarrow{\times q^2} 1 + q^2 = q^4$$

$$\Rightarrow q^4 - q^2 - 1 = 0 \Rightarrow q^2 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \xrightarrow{q^2 > 0} q^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

سؤال ۳۵: یک دنباله هندسی صعودی، تفاضل جمله های پنجم و اول برابر ۹ و مجموع دو جمله پنجم و هفتم برابر ۳۶ می باشد، جمله اول کدام است.

۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۴√۳ (۴)

$$a_5 - a_1 = 9 \Rightarrow aq^4 - a = 9 \Rightarrow a(q^4 - 1) = 9 \quad (1)$$

$$a_5 + a_7 = aq^4 + aq^6 = 36 \Rightarrow aq^4(1 + q^2) = 36 \quad (2)$$

در معادله (۱) و (۲) را بر هم تقسیم می کنیم:

$$\frac{a(q^4 - 1)}{aq^4(1 + q^2)} = \frac{9}{36} \Rightarrow \frac{q^4 - 1}{q^4(1 + q^2)} = \frac{1}{4} \Rightarrow q^4 - 4q^2 + 4 = 0$$

$$\Rightarrow (q^2 - 2)^2 = 0 \Rightarrow q^2 = 2 \Rightarrow q = \pm\sqrt{2} \xrightarrow{q > 0} q = \sqrt{2} \rightarrow (1) \text{ در معادله } \Rightarrow a((\sqrt{2})^4 - 1) = 9 \Rightarrow a = 3$$

سؤال ۳۶: یک دنباله هندسی، جمله دوم و دو برابر جمله پنجم و جمله هشتم می توانند سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی باشند، بزرگترین این سه عدد چند برابر کوچکترین آن است. (خارج تجربی ۹۲)

۲ + √۳ (۱) ۵ + ۲√۳ (۲) ۵ + ۴√۳ (۳) ۷ + ۴√۳ (۴)

تشکیل دنباله حسابی

$$a_r, 2a_5, a_8 \xrightarrow{a+c=2b} a_r + a_8 = 2(2a_5) \Rightarrow a_r q + a_r q^7 = 4a_r q^5$$

$$\Rightarrow a_r q(1 + q^6) = a_r q(4q^4) \Rightarrow 1 + q^6 = 4q^4 \Rightarrow q^6 - 4q^4 + 1 = 0 \xrightarrow{q^2=t}$$

$$t^3 - 4t + 1 = 0 \Rightarrow t = 2 \pm \sqrt{3} \xrightarrow{t=q^2} q^2 = 2 \pm \sqrt{3}$$

حال اگر $q^2 = 2 + \sqrt{3}$ نسبت بزرگترین این سه عدد (یعنی a_8) به کوچکترین آنها (یعنی a_r) برابر است با:

$$\frac{a_8}{a_r} = q^6 = (q^2)^3 = (2 + \sqrt{3})^3 = 4 + 3 + 4\sqrt{3} = 7 + 4\sqrt{3}$$

سؤال ۳۷: جواب های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ هستند اگر عبارات $\alpha + \beta, \alpha^2 + \beta^2, \alpha^3 + \beta^3$ به همین ترتیب تشکیل دنباله هندسی دهند، آنگاه کدام گزینه همواره صحیح است. ($\Delta \geq 0, \Delta = b^2 - 4ac$)

$\Delta \neq 0$ (۱) $b\Delta = 0$ (۲) $c\Delta = 0$ (۳) $\Delta = 0$ (۴)

دنباله هندسی: $\alpha + \beta, \alpha^2 + \beta^2, \alpha^3 + \beta^3$

$$\Rightarrow (\alpha^2 + \beta^2)^2 = (\alpha + \beta)(\alpha^3 + \beta^3) \Rightarrow \alpha^4 + \beta^4 + 2\alpha^2\beta^2 = \alpha^4 + \alpha\beta^3 + \beta\alpha^3 + \beta^4$$

$$\Rightarrow \alpha\beta^3 + \beta\alpha^3 - 2\alpha^2\beta^2 = 0 \Rightarrow \alpha\beta(\beta^2 + \alpha^2 - 2\alpha\beta) = 0 \Rightarrow \alpha\beta(\alpha - \beta)^2 = 0 \Rightarrow \frac{c}{a} \cdot \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{c}{a} \cdot \frac{\Delta}{a^2} = 0 \Rightarrow c\Delta = 0$$

سؤال ۳۸: اگر x_1, x_2, x_3 جواب های معادله $(m+2)x^2 - 2nx + 9m - 3n = 0$ باشند به ازای چه مقدار n ، اعداد x_1, x_2, x_3 تشکیل دنباله هندسی می دهند.

۳ (۱) ۶ (۲) ۹ (۳) -۶ (۴)

دنباله هندسی: $x_1, x_2, x_3 \Rightarrow x_1 x_3 = x_2^2 \Rightarrow x_1 x_3 = 9$

از طرفی در معادله داده شده حاصل ضرب جواب های برابر $\frac{c}{a}$ است.

$$(m+2)x^2 - 2nx + 9m - 3n = 0 \Rightarrow x_1 x_3 = \frac{9m - 3n}{m+2} = 9 \Rightarrow 9m - 3n = 9m + 18 \Rightarrow -3n = 18 \Rightarrow n = -6$$

دنباله بازگشتی



به دنباله ای که هر جمله با جمله (جمله های) قبل (بعد) از خود رابطه خاصی داشته باشد، دنباله بازگشتی می گوئیم.

سؤال ۱: پنج جمله اولیه دنباله بازگشتی $a_n = 3a_{n-1} + 2$ ، با فرض $a_1 = 1$ را بنویسید.

$$a_2 = 3a_1 + 2 = 3 \times 1 + 2 = 5$$

$$a_3 = 3a_2 + 2 = 3 \times 5 + 2 = 17$$

$$a_4 = 3a_3 + 2 = 3(17) + 2 = 53$$

$$a_5 = 3a_4 + 2 = 3(53) + 2 = 161$$

سؤال ۲: در دنباله $u_n = u_{n-1} + n^2$ ، $u_1 = 1$ ، جمله چهارم کدام است؟

$$u_1 = 1$$

$$u_2 = u_1 + (2)^2 = 1 + 4 = 5$$

$$u_3 = u_2 + (3)^2 = 5 + 9 = 14$$

$$u_4 = u_3 + 4^2 = 14 + 16 = 30$$

سؤال ۳: در دنباله بازگشتی $u_n = u_{n-2} + 2u_{n-1}$ ، $u_3 = 3$ ، $u_1 = 1$ ، سه جمله بعدی را بنویسید.

$$u_1 = 1$$

$$u_2 = 3$$

$$u_3 = u_1 + 2u_2 = 1 + 2 \times 3 = 7$$

$$u_4 = u_2 + 2u_3 = 3 + 2 \times 7 = 17$$

$$u_5 = u_3 + 2u_4 = 7 + 2(17) = 41$$

سؤال ۴: در دنباله ای رابطه بازگشتی $a_{n+1} = 2a_n - 5$ برقرار است. اگر جمله دوازدهم مساوی ۱۷ باشد، جمله دهم آن

کدام است؟

$$a_{12} = 2a_{11} - 5 \Rightarrow 17 = 2a_{11} - 5 \Rightarrow a_{11} = 11$$

$$a_{11} = 2a_{10} - 5 \Rightarrow 11 = 2a_{10} - 5 \Rightarrow a_{10} = 8$$

سؤال ۵: در دنباله بازگشتی $a_n = \frac{a_{n-1}}{2}$ ، $a_1 = -8$ ، جمله پنجم آن کدام است؟

$$a_1 = -8$$

$$a_2 = -\frac{8}{2} = -4$$

$$a_3 = -\frac{4}{2} = -2$$

$$a_4 = -\frac{2}{2} = -1$$

$$a_5 = -\frac{1}{2}$$

سؤال ۶: در یک دنباله بازگشتی $a_{n+1} = (n+1)a_n, a_1 = k$ نسبت جمله پنجم به جمله اول کدام است؟

$$a_{n+1} = (n+1)a_n \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = n+1$$

$$\begin{cases} \frac{a_5}{a_4} = 5 \\ \frac{a_4}{a_3} = 4 \\ \frac{a_3}{a_2} = 3 \\ \frac{a_2}{a_1} = 2 \end{cases} \xrightarrow{\times} \frac{a_5}{a_1} = 120$$

سؤال ۷: اگر a_k یک دنباله از اعداد صحیح باشند که $a_{m+n} = a_m + a_n + mn, a_1 = 1$ باشد آنگاه a_{17} برابر کدام است؟

$$m = n = 1 \rightarrow a_2 = a_1 + a_1 + 1 \times 1 = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$m = n = 2 \rightarrow a_4 = a_2 + a_2 + 4 = 3 + 3 + 4 = 10$$

$$\begin{cases} m = 4 \\ n = 2 \end{cases} \rightarrow a_6 = a_4 + a_2 + 8 = 10 + 3 + 8 = 21$$

$$\begin{cases} m = 6 \\ n = 6 \end{cases} \rightarrow a_{12} = a_6 + a_6 + 6 \times 6 = 21 + 21 + 36 = 42 + 36 = 78$$

سؤال ۸: دنباله a_n به این صورت تعریف شده است که $a_1 = 1$ و برای هر عدد طبیعی بزرگتر از یک مانند n

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1} \text{ در این صورت مقدار } a_{7.7} \text{ کدام است؟}$$

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = \frac{a_1}{a_1 + 1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{a_2}{a_2 + 1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$a_4 = \frac{a_3}{a_3 + 1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + 1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow a_{7.7} = \frac{1}{7.7}$$

سؤال ۹: دنباله زیر بطور بازگشتی تعریف شده اند. چهار جمله اول آنها را تعیین کنید.

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \geq 3 \text{ (دنباله فیبوناتچی)}$$

$$a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$$

$$a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 12, \dots$$

سؤال ۱۰: دنباله a_n بطور بازگشتی $a_n = na_{n-1}, a_1 = 1$ به ازای $n \geq 2$ تعریف شده است. آیا می توانید فرمول صریحی برای a_n حدس بزنید.

$$a_1 = 1 = 1!, a_2 = 2a_1 = 2 \times 1 = 2 = 2!$$

$$a_3 = 3a_2 = 3 \times 2! = 3! \Rightarrow a_n = n!$$

سؤال ۱۱: در یک دنباله اعداد $a_1 = 1$ و برای هر $n \geq 2$ داریم: $a_n = 2a_{n-1} + 1$ جمله هشتم این دنباله کدام است.

- (۱) ۱۲۷ (۲) ۱۵۹ (۳) ۲۴۷ (۴) ۲۵۵ (داخل تجربی ۹۵)

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= 2a_1 + 1 = 2(1) + 1 = 3 = 2^2 - 1 \\ a_3 &= 2a_2 + 1 = 2(3) + 1 = 7 = 2^3 - 1 \\ a_4 &= 2a_3 + 1 = 2(7) + 1 = 15 = 2^4 - 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_n = 2^n - 1 \Rightarrow a_8 = 2^8 - 1 = 255$$

سؤال ۱۲: در یک دنباله اعداد $a_1 = 3$ و برای هر $n \geq 2$ داریم: $a_n = 2a_{n-1} - 2$ ، حاصل $a_8 - a_4$ کدام است.

- (۱) ۳۲ (۲) ۴۸ (۳) ۵۶ (۴) ۶۴ (خارج تجربی ۹۵)

$$a_2 = 2a_1 - 2 = 2(3) - 2 = 4 \Rightarrow a_1 + 2^{2-2}$$

$$a_3 = 2a_2 - 2 = 2(4) - 2 = 6 \Rightarrow a_2 + 2^{3-2}$$

$$a_4 = 2a_3 - 2 = 2(6) - 2 = 10 \Rightarrow a_3 + 2^{4-2}$$

$$\Rightarrow a_n = a_{n-1} + 2^{n-2} \Rightarrow a_n - a_{n-1} = 2^{n-2} \Rightarrow a_8 - a_4 = 2^{8-2} = 2^6 = 64$$